Jürgen Roth

Quadrate erforschen

Mathematik an Konkreter Kunst entdecken

Lerngruppe:	6.-9. Schuljahr
Idee:	Anhand von Strukturen in Werken der Konkreten Kunst die aus Quadraten aufgebauten sind, lassen sich vielfältige geometrische Inhalte erarbeiten bzw. vernetzen und vertiefen.
Arbeitsblätter:	Arbeitsblatt 1: 6. Klasse / 9. Klasse Arbeitsblatt 2: 9. Klasse Arbeitsblatt 3: 7. Klasse
Thema:	Geometrie
Material:	Kopiervorlagen zu „Max Bill: Konstruktionen um das Thema 3:4:5“: • Bildstruktur (ohne Färbungen) • Bild • Folienvorlage: Quadratlinienraster in der Größe der kleinen Quadrate Kopiervorlage zu „Max Bill: Strahlung aus Rot“: • Bildstruktur (ohne Färbungen) Kopiervorlage zu „Max Bill: Strahlung aus Rot“: • Bildstruktur (ohne Färbungen) Dynamische Arbeitsblätter unter www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/

Muster und Strukturen sind zentrale Elemente der Mathematik, die Auseinandersetzung mit Ihnen muss folglich auch ein wichtiges Element des Mathematikunterrichts sein. Dabei geht es darum Muster, Strukturen und deren Eigenschaften zu erkennen und bei Problemlösungen zu nutzen. In der Elementargeometrie geht es u. a. um die Betrachtung von Figuren und deren Eigenschaften, wie etwa der Symmetrie. In diesem Artikel werden Figuren in Bildern der Konkreten Kunst analysiert und so Erkenntnisse zu Aspekten der (Schul-)Mathematik gewonnen oder vertieft. An Hand von drei Kunstwerken der Konkreten Kunst werden hier mathematische Aktivitäten zu Fragen wie etwa der Bestimmung von Flächeninhalten, der (Nach-)Konstruktion von geometrischen Strukturen und der Analyse von Symmetrieeigenschaften und Bewegungen mit Hilfe von Kongruenzabbildungen vorgestellt. Neben den abgedruckten Arbeitsblättern zur mathematischen Auseinandersetzung mit drei verschiedenen Kunstwerken werden im Internet weitere Materialien angeboten. Ergänzend dazu können unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/ dynamische Arbeitsblätter zu den Kunstwerken online genutzt und heruntergeladen werden.

Mathematik(unterricht) und Konkrete Kunst

In manchen Kunstrichtungen des 20. Jahrhunderts spielt die Mathematik eine bedeutende Rolle. Gerade in der Konkreten Kunst wird diese Wechselwirkung mit der Mathematik besonders intensiv. Künstler nutzen Ideen der Mathematik für die Bildkonzeption und der Betrachter muss zur Erschließung des Kunstwerks ebenfalls Kenntnissen aus der Mathematik nutzen. Grundlegende Informationen zum Zusammenspiel von Konkreter Kunst und Mathematik sind in Kasten 1 zusammengestellt, der als Arbeitsblatt zur Einführung in das Thema im Unterricht genutzt werden kann. Aus den dort genannten Gründen findet man in der Konkreten Kunst viele Kunstwerke, die sich zur mathematischen Analyse im Unterricht eignen. Sie können als Grundlage eines forschenden Mathematikunterrichts genutzt werden, in dem Schülerinnen und Schüler Neues in offenen Lernumgebungen selbstständig erarbeiten sowie bereits erworbene Kenntnisse vernetzen. So lassen sich Beziehungen zwischen scheinbar getrennten Bereichen der Schulmathematik entdecken, aber auch wesentliche Aspekte ganzer Themenstränge des Mathematikunterrichts üben und sichern.

Kasten 1:* *Mathematik und konkrete Kunst

In manchen Kunstrichtungen des 20. Jahrhunderts spielt die Mathematik eine bedeutende Rolle. Gerade in der Konkreten Kunst wird diese Wechselwirkung mit der Mathematik besonders intensiv. Max Bill, einer ihrer bekanntesten Vertreter, ist der „auffassung, es sei möglich, eine kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen denkweise zu entwickeln." (Bill, 1977) Demzufolge werden in der Konkreten Kunst insbesondere *mathematischen* Ideen visualisiert. Konkrete Künstler nutzen u. a. mathematische Strukturen, Figuren und Abbildungen um ihre Kunstwerke zu konzipieren und legen Wert darauf, dass der Betrachter sich diese Gestaltungsprinzipien wieder erschließen kann. Dieser Anspruch der Rationalität wurde im „Manifest der konkreten Kunst" festgehalten: „Das Kunstwerk muss vor seiner Ausführung vollständig vom Geist entworfen und geformt sein. (…) Das Bild muss vollständig aus rein bildnerischen Elementen konstruiert sein, d. h. Flächen und Farben. Folglich hat das Bild keine andere Bedeutung als sich selbst." (Ferrier/Bischoff 1990, S. 304)

In der konkreten Kunst kommt das Quadrat immer wieder als Bildformat vor und auch in der Bildkomposition spielen Quadrate immer wieder eine wesentliche Rolle. Dies ist kein Zufall! In der Konkrete Kunst ist das Quadrat ein wesentliches Gestaltungselement, weil es im Gegensatz zu anderen Rechtecken, die Assoziationen wie „stehen" oder „liegen" erwecken können, keine bevorzugte (Lese-)Richtung besitzt. Unter mathematischem Blickwinkel ist das Quadrat das Viereck mit den meisten Symmetrieeigenschaften. Es ist je vierfach achsen- und drehsymmetrisch (u. a. auch punktsymmetrisch). Gerade weil das Quadrat so besonders symmetrisch ist, gilt es den Konkreten Künstlern als neutral und nicht über sich hinausweisend. Dies nutzen sie um z. B. durch bewusste Flächenaufteilungen reizvolle Kompositionen zu schaffen an denen man häufig auch Figurensymmetrien entdecken kann.

Das Quadrat – eine grundlegende Figur

In allen drei Kunstwerken, die hier beispielhaft untersucht werden, ist das Quadrat die bestimmende Figur. Nicht nur das Bildformat ist jeweils quadratisch, auch in der Bildkomposition spielen Quadrate eine wesentliche Rolle. Dies ist kein Zufall! Unter mathematischem Blickwinkel ist das Quadrat das Viereck mit den meisten Symmetrieeigenschaften und in der Konkreten Kunst ist das Quadrat gerade auch wegen dieser Eigenschaft ein wesentliches Gestaltungselement (vgl. Kasten 1). Dass man bereits anhand von Strukturen in Werken der Konkreten Kunst, die aus Quadraten aufgebaut sind, vielfältige geometrische Inhalte erarbeiten bzw. vernetzen und vertiefen kann, zeigen beispielhaft die Arbeitsblätter 1 bis 3. Sie können einerseits als Ideenquelle und Anregung für eigene Aufgaben-entwicklungen zu Konkreten Kunstwerken dienen und andererseits direkt im Unterricht eingesetzt werden.

Arbeitsblatt 1: „Konstruktion um das Thema 3:4:5“ von Max Bill

Flächeninhalte vergleichen und messen

Die Flächenmessung ist eine Tätigkeit, die sich wie ein roter Faden durch den Mathematiklehrgang in allen Schulstufen und Schularten zieht. Bereits in der Grundschule werden Figuren bezüglich ihrer „Größe“, also ihres Flächeninhalts verglichen. Dabei stützt man sich am einfachsten auf das direkte Vergleichen durch Aufeinanderlegen. Dies gelingt am besten für ähnliche Figuren, für die man auf diese Weise direkt einen Größenvergleich erhält. Man kann aber auch indirekt vergleichen, indem man eine dritte Größe als Vermittler verwendet. Schließlich kann man die verschiedenen zu vergleichenden Figuren jeweils mit einer selbstgewählten Einheit auslegen. Hier tritt erstmals die *Idee des Messens* als *Auslegen mit einer Einheit* auf.

Die offenen Aufgaben von Arbeitsblatt 1 ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern diese und weitere wesentliche Aspekte des Messens von Flächeninhalten anhand des Kunstwerks „Konstruktion um das Thema 3:4:5“ von Max Bill selbstständig zu erarbeiten. In Aufgabe a) wird indirekt dazu angeregt, die Kantenlänge und den Flächeninhalt der vorkommenden Quadrate miteinander in Beziehung zu setzen sowie die Flächeninhalte der im Kunstwerk vorkommenden Quadrate direkt, indirekt und mit Hilfe einer selbst gewählten Einheit (hier die kleinen bunten Quadrate) zu vergleichen. Interessant ist dabei zu beobachten, wie die einzelnen Schüler vorgehen. Erst in der Diskussion der Vorgehensweise verschiedener Schülerinnen und Schüler werden die unterschiedlichen Zugänge zum Flächeninhaltsvergleich deutlich und können thematisiert werden. Um den Schülerinnen und Schülern auch eine enaktive Herangehensweise zu ermöglichen, sollten jeweils zwei Banknachbarn eine Kopie des Kunstwerks zum Reflektieren und zwei Kopien zum Ausschneiden einzelner Teilfiguren erhalten (vgl. Onlinematerial). Damit können sie in Aufgabe b) auch experimentell überprüfen, mit welchen Quadraten einer Größe das ganze Bild ausgelegt werden kann (vgl. Abb. 1) sowie darüber nachdenken, warum dies nicht mit jedem kleineren Quadrat funktioniert bzw. mit welchen Quadraten es möglich ist. Diese Erkenntnis lenkt den Blick auf den Aspekt der Teilbarkeit. Die Frage nach der Anzahl der Quadrate einer Größe mit denen das Gemälde jeweils ausgelegt werden kann, führt auf das systematische Zählen. Es werden Quadrate in einer Reihe und die Anzahl dieser Quadratreihen gezählt und damit die Flächeninhaltsformel für Rechtecke mit ganzzahligen Kantenlängen hergeleitet. Hier und für die weiteren Teilaufgaben kann es als Hilfestellung für einzelne Schüler auch sinnvoll sein, eine Folie mit einem Quadratlinienraster (vgl. Onlinematerial) in der Größe der kleinen bunten Quadrate bereitzuhalten, die auf die kopierten Bilder passt (vgl. Abb. 4).

In Aufgabe c) setzen sich die Schülerinnen und Schüler durch den Auftrag, das mittlere weiße Quadrat bzgl. des Flächeninhalts mit einem der rechtwinkligen Dreiecke zu vergleichen, implizit noch einmal mit dem direkten und dem indirekten Vergleich auseinander. Durch Aufeinanderlegen sieht man sofort, dass das weiße Quadrat einen größeren Flächeninhalt besitzt, als das rechtwinklige Dreieck (vgl. Abb. 2). Will man aber herausfinden, um wie viel es größer ist, muss man die Flächeninhalte der beteiligten Figuren quantifizieren. Dies gelingt wenn man z. B. beide Flächen mit den kleinen bunten Quadraten auslegt. (Alternativ kann man auch die oben erwähnte Quadratrasterfolie darüber legen.) Dies ist beim weißen Quadrat einfach, beim rechtwinkligen Dreieck aber nicht sofort einsichtig (vgl. Abb. 3). Hier kann man entweder überstehende Stücke des Dreiecks (real oder in Gedanken) abschneiden, in passenden kleinen Quadraten ergänzen und so eine gute Näherungslösung erhalten, oder auf die Idee kommen, zwei der Dreiecke zu einem Rechteck zusammenzulegen und dann auszulegen (vgl. Abb. 2 und Abb. 3). Zur Diskussion der verschiedenen Schülerlösungen im Unterrichtsgespräch kann es hilfreich sein, mit dem dynamischen Arbeitsblatt zum Bild (vgl. http://www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/) und einem Beamer die verschiedenen Zugangsweisen von einzelnen Schülerinnen und Schülern demonstrieren zu lassen.

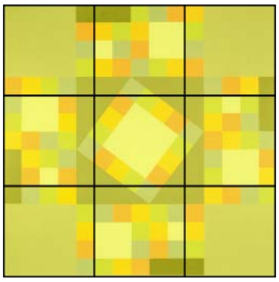


Abb. 1: Auslegen

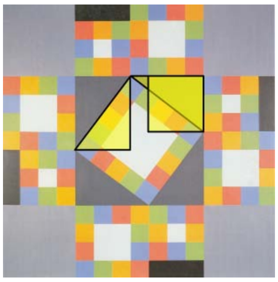


Abb. 2: Flächenvergleich

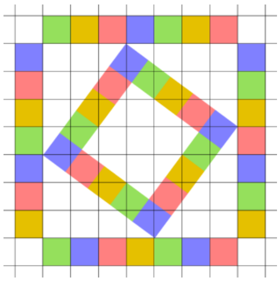


Abb. 3: Quadratgitter

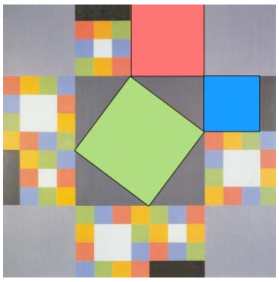


Abb. 4: Thema 3:4:5

Diese Aktivitäten sollten zu der Erkenntnis führen, dass die Idee des Auslegens grundsätzlich für gute näherungsweise Flächeninhaltsbestimmungen genutzt werden kann. Daneben lässt sich der Inhalt auch bei komplexeren Flächen immer wieder mit Hilfe geeigneter Zerlegungen sogar exakt bestimmen.

Symmetrie

Aufgabe d) regt dazu an, Symmetrieeigenschaften des Quadrats zu entdecken bzw. zu wiederholen. Auf dieser Grundlage wird erarbeitet, welche dieser Symmetrieeigenschaften das Kunstwerk „Konstruktionen um das Thema 3:4:5“ von Max Bill noch besitzt, wenn man von der Farbgebung absieht und nur die Bildstrukturen zugrunde legt. Hier geht es darum, Eigenschaften von Figurensymmetrien (oder Abbildungen) zu erfassen bzw. zu überprüfen. Hierfür wird die Bildstruktur ohne Farbgebung als Ausdruck und idealerweise zur Kontrolle auch als Folie benötigt (vgl. Onlinematerial). Bis einschließlich Aufgabe d) ist das Arbeitsblatt 1 bereits ab der 6. Jahrgangsstufe einsetzbar. Aufgabe e) sollte man allerdings in Teilen erst in der 9. Klasse einsetzen.

Satz des Pythagoras

Bei manchen Werken der Konkreten Kunst bietet auch eine Auseinandersetzung mit den Titeln eine Einstiegsmöglichkeit in mathematische Themen. Dies wird auch in Aufgabe e) genutzt. Sucht man im Bild nach den Verhältnissen 3:4:5, so stößt man schnell auf die Quadrate deren Kantenlängen ein entsprechendes Vielfaches der Kantenlängen der kleinen bunten Quadrate ist. Dies kann – insbesondere wenn man die Pythagorasfigur im Bild entdeckt hat (vgl. Abb. 4) – den Satz des Pythagoras als Flächensatz in den Blick rücken. Dadurch wird auch die Bildkomposition (z. B. die schwarzen Balken und die weißen Quadrate) besser verstehbar. Die Frage, ob das „schräge“ Quadrat in der Mitte auch anders eingebaut werden könnte, kann bei entsprechender Argumentation zur Erkenntnis führen, dass es nur wenige ganzzahlige Zahlentripel gibt, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Hier kann sich auch eine Auseinandersetzung mit pythagoräischen Zahlentripeln anschließen.

In einem abschließenden Unterrichtsgespräch kann es sinnvoll sein das dynamischen Arbeitsblatt zum Bild (vgl. http://www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/) mit einem Beamer zu präsentieren und damit die Lage des Quadrats zu dynamisieren. Durch die gemeinsame Diskussion und Begründung der beobachtbaren Phänomene lassen sich die Erkenntnisse der Schülerinnen und Schüler sichern und vertiefen.

Arbeitsblatt 2: „Strahlung aus Rot“ von Max Bill

Strukturen erfassen durch Nachkonstruieren

Es ist leicht gesagt, dass man beim Betrachten von Werken der konkreten Kunst Strukturen erfassen und, etwa für Flächeninhaltsbestimmungen, Längenbeziehungen ableiten muss. Die Frage ist nur, wie geht man dabei vor? Ein gangbarer Weg, um Schülerinnen und Schüler beim Fokussieren auf geometrische Strukturen zu unterstützen, besteht darin, ihnen den Auftrag zu geben, ein Kunstwerk nachzukonstruieren. Derartige Aufgaben sprechen viele Schülerinnen und Schüler schon aus ästhetischen Gründen an und können dazu beitragen, dass die vorliegenden Strukturen genauer untersucht und Beziehungen in den Blick genommen werden. Auf dem Arbeitsblatt 2 wird in Aufgabe a) genau dieser Weg beschritten. Trotzdem ist die Aufgabe, das Bild nachzukonstruieren noch sehr offen und es besteht die Gefahr, dass einige Schülerinnen und Schüler daran scheitern. Hier kann es helfen, nur die Berandungslinien der beteiligten Flächen mit wesentlichen Punkten auf einem Arbeitsblatt vorzugeben (vgl. Abb. 5 und Onlinematerial) und Abstände zwischen Punkten messen zu lassen. Auch der Hinweis mit Zirkel und Lineal geeignet Hilfslinien einzuzeichnen, kann als weiter Unterstützung hilfreich sein und schließlich zu einer Darstellung wie in Abbildung 6 führen.

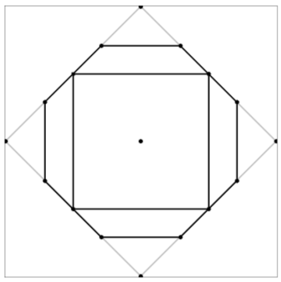


Abb. 5: Berandungslinien und wesentliche Punkte

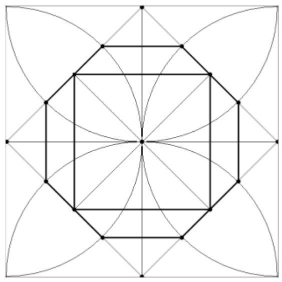


Abb. 6: Eingezeichnete Hilfslinien

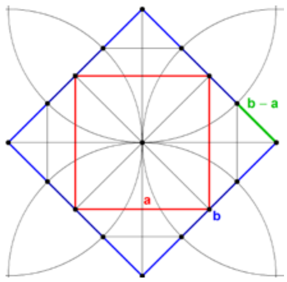


Abb. 7: Längenbeziehungen ableiten

Längenbeziehungen bestimmen und Flächeninhalte berechnen

In Aufgabe b) sollen ausgehend von einer vorgegebenen Kantenlänge des Bildes „Strahlung aus Rot“ die Flächeninhalte aller Teilflächen bestimmt werden. Die Nachkonstruktion des Kunstwerks hat die Struktur offengelegt. Das Ergebnis, eine Konstruktion wie in Abbildung 6, erlaubt es Längenbeziehungen abzuleiten (vgl. Abbildung 7) und damit geeignete Teilflächeninhalte zu bestimmen. Lösungshinweise hierzu findet man im Internet unter der Adresse http://www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/texte/roth_bill_strahlung_aus_rot_flaecheninhalte.pdf).

Arbeitsblatt 3: „Translokation B“ von Camille Gräser

Kunstwerke beweglich denken

Für eine inhaltliche Auseinandersetzung mit Kunstwerken kann es hilfreich sein, in ein zunächst statisches Bild eine Bewegung hineinzusehen und damit zu argumentieren. Dies wird bei der Analyse des Kunstwerks „Translokation B“ von Camille Graeser besonders deutlich. Beim Betrachten des Bilds hat man den Eindruck, dass das rote Quadrat von seinem Platz in der oberen Reihe wegbewegt wurde (vgl. Abb. 8). In Aufgabe b) von Arbeitsblatt 3 wird der Frage nachgegangen, mit welcher Bewegung dies geschehen sein könnte. Lässt sich das rote Quadrat in seiner Ausgangslage mit Hilfe einer Achsenspiegelung, Verschiebung, Drehung oder einer Kombination aus diesen mit der derzeitigen Lage zur Deckung bringen? Um diese Frage zu beantworten müssen Kenntnisse über Eigenschaften der Kongruenzabbildungen (re-)aktiviert werden. Ein erster Zugang kann es sein, sich

Ergebnisse von Verschiebungen, Drehungen oder Achsenspiegelungen des roten Quadrats kopfgeometrisch vorzustellen. Anschließend können einzelne Abbildungen (etwa Achsenspiegelungen) mit Zirkel und Lineal auf einer Kopie des Kunstwerks (vgl. Onlinematerial) durchgeführt werden.

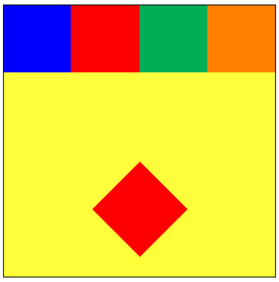


Abb. 8: Fehlendes Quadrat

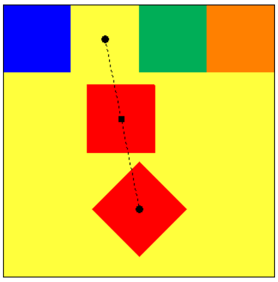


Abb. 9: Verschieben

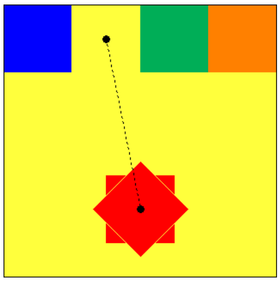


Abb. 10: Passt nicht!

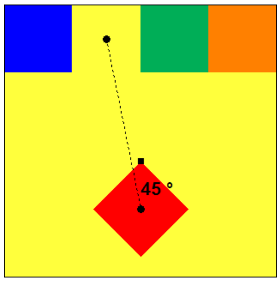


Abb. 11: Noch drehen!

Warum gelingt die Bewegung z. B. nicht mit einer Achsenspiegelung? Die Achse müsste Mittelsenkrechte aller Verbindungsstrecken entsprechender Punkte von Bild und Urbild sein. An Abb. 12 lässt sich schnell erarbeiten, dass das hier nicht der Fall ist. Auch eine einfache Verschiebung, bei der etwa der Mittelpunkt des Urbilds auf den Mittelpunkt des Bilds abgebildet wird (vgl. Abb. 9), führt nicht zum Ziel, denn hier wären entsprechende Kanten von Bild und Urbild parallel zueinander. Spätestens eine Durchführung der Verschiebung (vgl. Abb. 10) macht deutlich, dass anschließend noch um den gemeinsamen Mittelpunkt der roten Quadrate um 45° gedreht werden muss (vgl. Abb. 11). Wie man sich leicht überlegt – man muss nur eine Ecke des Quadrates mit der nächsten zur Deckung bringen, was einer Drehung um 90° entspricht – würden auch Drehungen um 135°, 225° bzw. 315° um den gemeinsamen Mittelpunkt die beiden Quadrate zur Deckung bringen.

Lässt sich der gewünschte Effekt auch mit *einer* Drehung alleine realisieren? Um diese Frage zu beantworten muss man zunächst klären, wo ggf. das Drehzentrum liegt. Der Mittelpunkt des Quadrats bewegt sich bei der Drehung auf einer Kreislinie um das Drehzentrum. Dieses hat folglich von allen Lagen des Quadratmittelpunkts denselben Abstand und liegt damit auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von Ausgangs- und Endlage des Quadrats. Wo aber liegt das Drehzentrum auf der Mittelsenkrechten, gibt es evtl. mehrere Lagen und um welchen Drehwinkel muss man jeweils drehen? Mit einem geeigneten dynamischen Arbeitsblatt (vgl. www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/) lassen sich diese Fragen experimentell klären und anschließend (z. B. im Rückgriff auf die Ergebnisse der Verschiebung und der dann noch notwendigen Drehungen) verstehen und begründen (vgl. Abb. 9 bis Abb. 15).

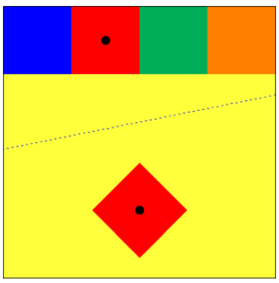


Abb. 12: Nur drehen?

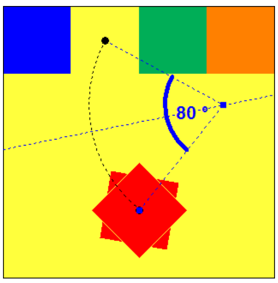


Abb. 13: Drehzentrum?

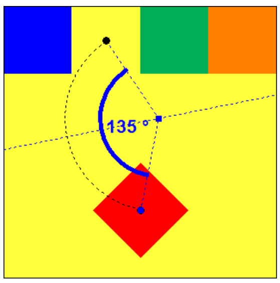


Abb. 14: Es funktioniert!

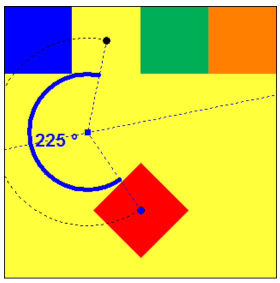


Abb. 15: Gibt es mehr?

Variiert man den Drehpunkt auf der Mittelsenkrechten, so wird sehr schnell klar, dass es vier geeignete Lagen für das Drehzentrum und entsprechend vier geeignete Drehwinkel gibt. Es handelt sich um dieselben Drehwinkel wie bereits nach der Verschiebung, nämlich 45°, 135°, 225° und 315°.

Kennt man diese Winkel und benutzt man die Tatsache, dass die beiden Quadratmittelpunkte und das Drehzentrum zusammen ein gleichschenkliges Dreieck bilden, so lässt sich mit Hilfe des Innenwinkelsummensatzes im Dreieck der jeweilige Drehpunkt konstruieren.

Als Lehrkraft kann man sich die Möglichkeiten des dynamischen Arbeitsblatts mit Hilfe eines Films unter der Adresse http://www.youtube.com/watch?v=2f-TIKfvnH0 zeigen lassen.

Zusammenfassung

Es wurde deutlich, dass anhand von Werken Konkreter Kunst eine breite Palette mathematischer Themen für den Unterricht erarbeitet, oder zumindest vernetzt und miteinander in Beziehung gesetzt werden kann. Die Idee besteht darin, dass Schülerinnen und Schüler sich anhand relativ offener Aufgaben, wie sie exemplarisch in den Beispielen 1 bis 3 vorgestellt werden, selbstständig mit den Kunstwerken und ihren mathematischen Aspekten auseinandersetzen.

Literatur

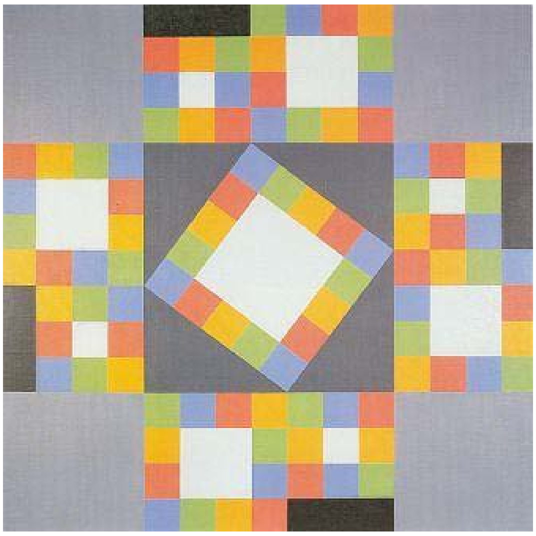
Bill, M. (1977): die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In: E. Hüttinger, Max Bill. Zürich. S. 105-116

Ferrier, J.-L.; Bischoff, M. (Hrsg.) (1990): DuMont's Chronik der Kunst im 20. Jahrhundert – Stile, Akteure und Meisterwerke der Moderne. DuMont Buchverlag, Köln

Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Wolters Kluwer Deutschland GmbH, München

Roth, J. (2009): Strukturen, Figuren und Abbildungen– Ein Zusammenspiel von konkreter Kunst und Mathematik. In: Der Mathematikunterricht, Heft 2, (55) 2009, S. 5-11

Arbeitsblatt 1: ***Max Bill: Konstruktion um das Thema 3:4:5 (1980)***



a) *Quadrate vergleichen*

- Suche in dem Bild verschieden große Quadrate und vergleiche ihre Kantenlängen.
- Findest du verschiedene Möglichkeiten, die Größe (den Flächeninhalt) der verschiedenen Quadrate im Bild miteinander zu vergleichen?
- Versuche herauszufinden, wie viele der kleinen bunten Quadrate jeweils auf die größeren Quadrate passen.

b) *Bild auslegen*

- Mit welchen vorkommenden Quadraten einer Größe kann man das Bild passend auslegen?
- Wie viele Quadrate einer Größe werden dazu jeweils benötigt? Kannst du die Anzahl bestimmen ohne alle Quadrate einzeln zu zählen?
- Welche Eigenschaft müssen die Quadrate haben, damit man das Bild mit ihnen vollständig auslegen kann?

c) *Quadrat und rechtwinkliges Dreieck*

- Wer hat den größeren Flächeninhalt, das mittlere weiße Quadrat, oder eines der vier grauen rechtwinkligen Dreiecke?
- Kannst du auch angeben, um wie viel die größere der beiden Flächen größer ist als die andere?

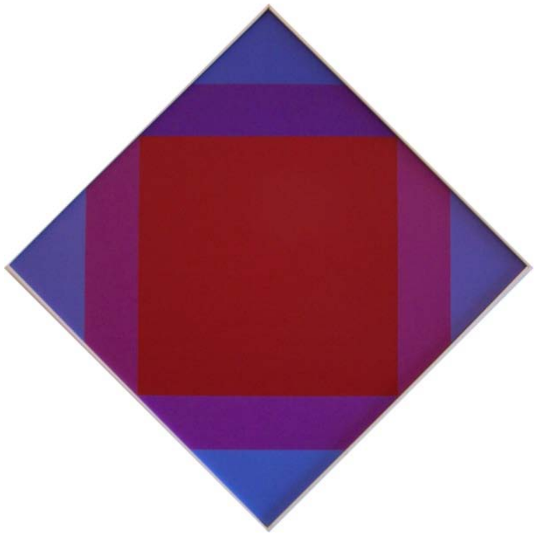
d) *Symmetrie*

- Das Bild besitzt ein quadratisches Format. Ein Quadrat ist besonders symmetrisch. Findest du alle Möglichkeiten, ein Quadrat mit sich selbst zur Deckung zu bringen?
- Das Kunstwerk besitzt wegen seiner Struktur, nicht mehr alle Symmetrieeigenschaften des Quadrats. Findest du alle Möglichkeiten es mit sich selbst zur Deckung zu bringen, wenn man von der Farbgebung absieht?

e) *Bildtitel*

- Max Bill hat sein Bild „Konstruktion um das Thema 3:4:5" genannt. Kannst du dir vorstellen warum?
- Suche einen zusammenhängenden Bildausschnitt der dem Titel ebenfalls gerecht wird und zeichne es maßstabsgetreu in dein Heft.
- In der Mitte des Bildes ist ein Quadrat mit der fünffachen Kantenlänge der kleinen bunten Quadrate „schräg" in ein größeres Quadrat eingefügt. Hätte Max Bill es auch noch anders einbauen können? Begründe deine Antwort.

Arbeitsblatt 2: ***Max Bill: Strahlung aus Rot (1972/74)***



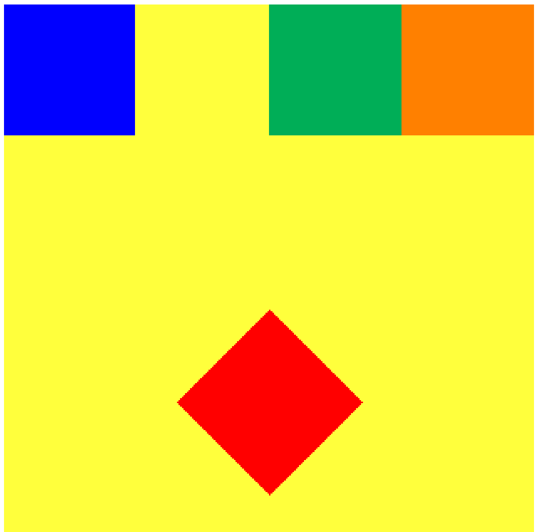
a) Nachkonstruieren

- Max Bill hat dem roten Quadrat ein violettes Achteck und ein blaues Quadrat umbeschrieben. Konstruiere das Bild nach. Beginne mit dem inneren Quadrat und wähle eine Kantenlänge von 5 cm.

b) Flächeninhalte

- Wie groß sind die Flächeninhalte aller Teilflächen deiner Nachkonstruktion?
- Max Bill hat für das große blaue Quadrat als Flächeninhalt genau einen Quadratmeter gewählt. Welchen Flächeninhalt haben die Teilflächen in seinem Originalkunstwerk?

Arbeitsblatt 3: ***Camille Graeser: Translokation B (1969)***



a) Nachkonstruieren

- Das Originalkunstwerk von Camille Graeser ist ein Quadrat mit Kantenlänge 120 cm.
- Konstruiere das Bild im Maßstab 1:10 nach.

b) „Translokation", aber wie?

- Camille Graeser hat sein Bild Translokation B genannt und tatsächlich hat man den Eindruck, dass das rote Quadrat von seinem Platz in der oberen Reihe wegbewegt wurde.
- Lässt sich das rote Quadrat in seiner Ausgangslage mit Hilfe einer Achsenspiegelung, Verschiebung, Drehung oder einer Kombination aus diesen mit der derzeitigen Lage zur Deckung bringen?
- Gib ggf. an, wie genau verschoben, gedreht, gespiegelt wurde bzw. welche Bewegungen man kombinieren muss.
- Findest du mehr als eine Möglichkeit diese Bewegung zu realisieren?
- Lässt sich der gewünschte Effekt auch mit *einer* Drehung alleine realisieren? Wo muss ggf. das Drehzentrum liegen?
- Wie viele verschiedene Drehungen gibt es, die das rote Quadrat in seiner Ausgangslage mit der derzeitigen Lage zur Deckung bringen? Untersuche das mit Hilfe des dynamischen Arbeitsblatts zum Bild auf der Seite www.juergen-roth.de/dynageo/kunst/. Versuche deine Entdeckung zu begründen. Kannst du für jeden möglichen Drehwinkel die Lage des zugehörigen Drehzentrums konstruieren?

Onlineangebot: Max Bill: Strahlung aus Rot – Berechnung der Flächeninhalte der Teilflächen

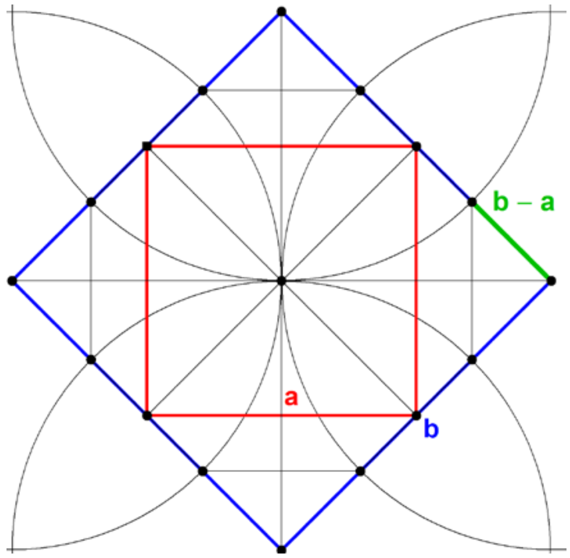
Die Diagonale d des großen Quadrats ist doppelt so lang, wie die Kantenlänge a des kleinen Quadrats. (Warum?)

$$d = 2a$$

Der Zusammenhang zwischen der Kantenlänge b des großen Quadrats und der Kantenlänge a des kleinen Quadrats lässt sich im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und der Hypotenusenlänge b über den Satz des Pythagoras berechnen:

$$b = \sqrt{a^2 + a^2} = a \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow \quad a = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Der Abbildung lässt sich entnehmen (vgl. die eingezeichneten Kreisbögen mit Radius a), dass die grüne Kathete des kleinen rechtwinkligen Dreiecks folgende Länge besitzt:



$$b - a = \begin{cases} a \cdot \sqrt{2} - a = (\sqrt{2} - 1) \cdot a \\ b - \frac{b}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot b \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die Flächeninhalte für die Teilflächen des Kunstwerks (in Abhängigkeit von a bzw. b):

- Flächeninhalt des kleinen Quadrats: $A_{kleines\ Quadrat} = \begin{cases} a^2 \\ \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{b^2}{2} \end{cases}$
- Flächeninhalt des großen Quadrats: $A_{großes\ Quadrat} = \begin{cases} \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 2a^2 \\ b^2 \end{cases}$
- Flächeninhalt des kleinen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks:

$$A_{kleines\ Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot (b-a)^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 - 2\sqrt{2} + 1\right) \cdot a^2 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot a^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot b^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot b^2 \end{cases}$$

- Flächeninhalt des Achtecks:

$$A_{Achteck} = A_{großes\ Quadrat} - 4 \cdot A_{kleines\ Dreieck} = \begin{cases} 2a^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot a^2 = \left(4\sqrt{2} - 4\right) \cdot a^2 \\ b^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot b^2 = \left(2\sqrt{2} - 2\right) \cdot b^2 \end{cases}$$

Damit erhält man folgende Werte für die Flächeninhalte in Abhängigkeit von der jeweils im Bild vorgegebenen Seitenlänge:

$a = 1 \quad \Rightarrow \quad A_{kleines\ Quadrat} = 1; \quad A_{großes\ Quadrat} = 2; \quad A_{Achteck} = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1{,}66$

$a = 5\ cm \quad \Rightarrow \quad A_{kleines\ Quadrat} = 25\ cm^2; \quad A_{großes\ Quadrat} = 50\ cm^2; \quad A_{Achteck} \approx 41{,}42\ cm^2$

$b = 1\ m \quad \Rightarrow \quad A_{kleines\ Quadrat} = 0{,}5\ m^2; \quad A_{großes\ Quadrat} = 1\ m^2; \quad A_{Achteck} \approx 0{,}83\ m^2$